# העתקה לינארית

## הגדרה

העתקה לינארית או טרנספורמציה לינארית היא פונקציה שמאפשרת לנו לעבור ממרחב אחד למרחב אחר. המרחבים יכולים להיות ממימד שונה או בסיסים שונים, ואפילו ניתן לעשות העתקה ממרחבים מסוגים שונים כמו ממרחב של וקטור למרחב של פולינומים או מטריצות. וכן ניתן לעבור ממרחב אחד לעצמו, פעולה זו נקראת "אופרטור לינארי".

ננסה לדמיין דוגמא להעתקה לינארית. ישנו מרחב דו מימדי מסוים, נדמיין אותו בתור קווי אורך ורוחב במרחקים שווים זה מזה. כעת נדמיין שכל הקווים מצודדים ימינה ומתרחקים זה מזה באופן שווה. מה שקרה הוא שעשינו העתקה מהמרחב הדו מימדי הראשון למרחב דו מימדי אחר שהבסיס שלו שונה. בהעתקה לינארית המרחב כולו זז, גדל או קטן, אמנם ישנם כמה תכונות שצריכים להישמר אחרת העתקה זו לא תחשב העתקה לינארית: נקודת המרכז של המרחב לא משתנית, הקווים לא מתעקמים אלא רק מצודדים, וכן המרחק היחסי בין כל הקווים תמיד שווה. כעת אנו יכולים להגדיר תכונות אלו כמו שהם מתבטאות בצורה מתמטית.

## תכונות העתקה לינארית

נתונים שני המרחבים S ו-B והעתקה לינארית המקיימת T: S -> B. העתקה זו חייבת לקיים שלושה תכונות:

1. אם נציב בפונקציה את וקטור ה-0 נקבל את וקטור ה-0. T(0) = 0
2. אם נסכום שני וקטורים v ו-u ונציב בפונקציה, התוצאה צריכה להיות שווה להצבת שני הוקטורים בנפרד וסכימת התוצאה.

1. אם נכפול את וקטור v בסקלר a ונציב בפונקציה זה שווה להצבת הוקטור בנפרד ולהכפיל את התוצאה בסקלר.

## משפטים

### משפט 1:

כל העתקה לינארית מהצורה T: Rn -> Rm, באה מהצורה T(v) = A∙v כאשר A היא מטריצה מסדר גודל של m x n. A נקראת המטריצה המייצגת של T.

אם נחזור להעתקה המדומיינת שעשינו בסעיף א' בה אמרנו שקווי הרוחב והאורך מצודדים ומתרחקים זה מזה, נשים לב שמספיק שנדע את שינוי המיקום של וקטורי הבסיס הפורשים את המרחב, כדי שנדע את שינוי המיקום של כל הוקטורים. נעשה זאת באמצעות כך שנייצר מהמיקום החדש של וקטורי הבסיס מטריצה, וכל וקטור שנכפול במטריצה זו ייתן לנו את המיקום החדש של הוקטור. מטריצה זו היא בעצם מטריצה A ולכן נקראת "המטריצה המייצגת של "T. כל העתקה לינארית נוכל לתאר באמצעות מטריצה מסוג זה.

### משפט 2:

תהי פונקציה F: Rn -> Rm המקיימת F(v) = A∙v. אם A היא מטריצה מסדר גודל של m x n אז פונקציה F היא העתקה לינארית.

הוכחה: F(u + v) = A∙ (u + v) = Au + Av = F(u) + F(v)

F(𝛼∙u) = A∙𝛼∙u = 𝛼∙Au = 𝛼∙F(u)

### משפט 3:

יהי V ו-W מרחבים וקטוריים, ויהי v1, v2, …, vn וקטורי הבסיס ל-V ו- w1, w2, …, wn וקטורים כלשהם ב-W. אז קיימת העתקה אחת ויחידה T: V -> W המקיימת:

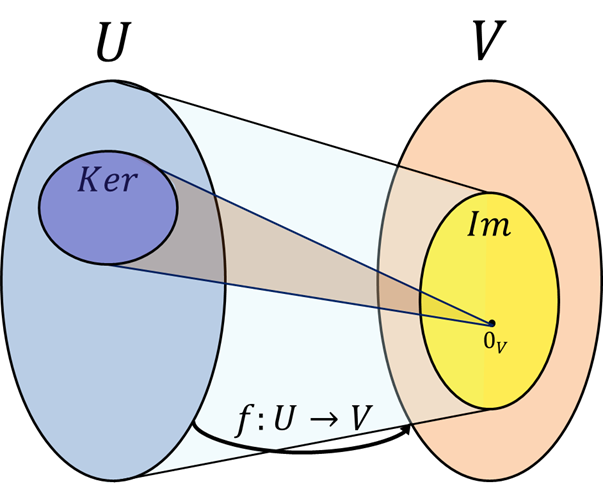
T(v1) = w1, T(v2) = w2, …, T(vn) = wn.

## גרעין ותמונה

קיימת העתקה לינארית F: U -> V. הגרעין של F הוא קבוצה של כל הוקטורים ב-U שאם נציבם בהעתקה הלינארית נקבל את וקטור ה-0 השייך ל-V, נסמן גרעין של F כך: ker(f).

התמונה של F הוא קבוצה של כל הוקטורים ב-V שניתן להגיע אליהם באמצעות העתקה לינארית, נסמן תמונה של F כך:img(f) .

**טענה:** התמונה של F היא תת מרחב של V, והגרעין של F הוא תת מרחב של U. ולכן מכיוון שהגרעין והתמונה הם תתי מרחבים ניתן למצוא להם: בסיס, מימד, ומערכת משוואות.



### משפטים

1. תהי העתקה לינארית F: Rn -> Rm, אז F היא חד חד ערכית (חח"ע) אם ורק אם מתקיים: dim( ker(f) ) = 0, כלומר אם ורק אם הגרעין היא הקבוצה הריקה ker(f) = {0}. זאת משום שאם בגרעין יש יותר מוקטור אחד אז יש תמונה (וקטור ה-0) שיש לה יותר ממקור אחד, ולכן F לא תהיה חח"ע.
2. תהי העתקה לינארית F: Rn -> Rm, אז F היא על אם ורק אם מתקיים: dim( img(f) ) = m.
3. תהי העתקה לינארית F: U -> V. מתקיים:[[1]](#footnote-1)dim( img(f) ) + dim( ker(f) ) = dim(u) .

## הרכבת העתקות לינאריות

העתקה לינארית היא כמו פונקציה, לכן כמו שניתן להרכיב פונקציות ניתן להרכיב העתקות לינאריות. קיימת העתקה לינארית F: Rn -> Rm והעתקה לינארית G: Rm -> Rp אז ההרכבה של G על F היא העתקה המקיימת G\*F: Rn -> Rp.

אם המטריצה המייצגת של F היא A, המטריצה המייצגת של G היא B, והמטריצה המייצגת של G\*F היא C, אז היחס בין כל מטריצות אלו הוא C = B∙A. מסקנה: הרכבת העתקות תואמת לכפל מטריצות.

# וקטור קואורדינטות

## הגדרה

יהי V מרחב וקטורי, ויהי B = (v1, v2, …, vn) וקטורי הבסיס של V. בהינתן וקטור w השייך ל-V, מתקיים: w = 𝛼1∙v1 + 𝛼2∙v2 + ⋯ + 𝛼n∙vn . אזי וקטור הקואורדינטות של w לפי B הוא: [w]B = (𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n).

נשים לב כי וקטור הקואורדינטות של כל וקטור נתון לפי הבסיס הסטנדרטי E, שוקטורי הבסיס שלו הם בעצם העמודות במטריצת היחידה, היא אותו הוקטור עצמו [u]E = u.

## בסיסים שונים לאותו תת מרחב

לכל מרחב וקטורי יש מספר קבוע של וקטורים בבסיס, אמנם יכול להיות שלאותו מרחב וקטורי יהיו וקטורים שונים בבסיס שפורשים את אותו המרחב. במצב זה לוקטור אחד במרחב יש מספר וקטורי קואורדינטות.

יהי מרחב וקטורי V, ויהי B = (v1, v2, …, vn) ו- C = (u1, u2, …, un) שתי סוגים של וקטורי הבסיס של V. בהינתן וקטור w השייך ל-V, כך שמתקיים:

β1∙u1 + β2∙u2 + ⋯ + βn∙un w = 𝛼1∙v1 + 𝛼2∙v2 + ⋯ + 𝛼n∙vn =

אזי וקטור הקואורדינטות של w לפי B הוא: [w]B = (𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n), ווקטור הקואורדינטות של w לפי C הוא: [w]C = (β1, β2, …, βn).

### מטריצת מעבר בסיס

כדי לעבור מוקטור קואורדינטות של אותו הוקטור לפי בסיסים שונים נשתמש "במטריצת מעבר בסיס". נסמן מטריצה זו מבסיס B לבסיס C PC<-B, כך שמתקיים: [w]C = PC<-B∙[w]B .

נשים לב שמטריצת מעבר הבסיס צריכה להיות מגודל n n x מפני שאנו מכפילים אותה בוקטור בגודל n ומצפים לקבל וקטור בגודל n. כדי למצוא את מטריצת מעבר בסיס יש שתי שיטות:

1. בונים מטריצה חדשה שמצד שמאל נמצאים וקטורי הבסיס של C בתור עמודות, ומצד ימין וקטורי הבסיס של B בתור עמודות, כך שנקבל מטריצה שנראית כך: [ C | B ]. נוכל להיעזר בסימון של מטריצת מעבר הבסיס PC<-B כדי לדעת באיזה צד לשים כל מטריצה. מדרגים את מטריצה C עד שהיא הופכת להיות מטריצת היחידה. המטריצה שתתקבל בצד ימין היא מטריצת מעבר הבסיס.
2. לוקחים את וקטורי הבסיס של B ומוצאים את וקטורי הקואורדינטות שלהם לפי C. מטריצת מעבר הבסיס תהיה וקטורי קואורדינטות אלו לפי הסדר. PC<-B = [ [v1]C, [v2]C, …, [vn]C ]

## מטריצה מייצגת לפי בסיסים

### הגדרה

יהי שני מרחבים וקטוריים V ו-W והעתקה לינארית F: V -> W. ויהי A = (v1, v2, …, vn) וקטורי הבסיס של V, ו- B = (w1, w2, …, wm) וקטורי הבסיס של W. אזי "המטריצה המייצגת לפי בסיסים" של העתקה הלינארית F היא מטריצה שאם נכפיל אותה (משמאל) בכל וקטור קואורדינטות ב-V נקבל את וקטור הקואורדינטות ב-W של הוקטור המתאים לפי העתקה הלינארית.

כלומר, יהי הוקטור a וקטור כלשהו ב-V המקיים a = 𝛼1∙v1 + 𝛼2∙v2 + ⋯ + 𝛼n∙vn, כך שוקטור הקואורדינטות של a לפי A הוא [a]A = (𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n). ויהי הוקטור b וקטור ב-W המתאים לוקטור a לפי העתקה הלינארית המקיים b = β1∙w1 + β2∙w2 + ⋯ + βm∙wm, כך שוקטור הקואורדינטות של b לפי B הוא [b]B = (β1, β2, …, βm). אזי נוכל לחשב את [b]B באמצעות המטריצה המייצגת לפי בסיסים, אותה נסמן [F]AB, באמצעות הנוסחה: [b]B = [F]AB∙[a]A .

המטריצה המייצגת לפי בסיסים בעצם זהה למטריצה המייצגת הרגילה, אלא שבמקום להכפיל אותה פשוט בוקטור a ולקבל את הוקטור המתאים b מכפילים בוקטור הקואורדינטות [a]A ומקבלים את וקטור הקואורדינטות המתאים [b]B.

### כיצד מוצאים מטריצה מייצגת לפי בסיסים

נשים לב שהמטריכצה המייצגת לפי בסיסים צריכה להיות בגודל m x n, משום שאנו מכפילים אותה בוקטור בגודל n ומצפים לקבל וקטור בגודל m. למציאת מטריצה זו יש שתי שיטות:

1. לוקחים את כל וקטורי הבסיס ב-V (v1, v2, …, vn) ומוצאים את ההעתקה שלהם ב-W. לכל הוקטורים שקיבלנו מוצאים את וקטור הקואורדינטות שלהם לפי B. מציבים וקטורים אלו בתור עמודות בהתאמה במטריצה ומקבלים את המטריצה המייצגת לפי בסיסים:

[F]AB = [ [f(v1)]B, [f(v2)]B, …, [f(vn)]B ].

1. נסמן ב-C את המטריצה המייצגת הרגילה של F המקיימת: F(v) = C∙v. עוד נסמן ב-E את וקטורי הבסיס הסטנדרטי בגודל של הבסיס A, כך שנקבל שוקטורי הבסיס של E הם בעצם העמודות במטריצת היחידה בגודל של הבסיס A. וכן נסמן ב-E' את וקטורי הבסיס הסטנדרטי בגודל של הבסיס B. המטריצה המייצגת לפי בסיסים תהיה המכפלה בין שלושת המטריצות:

[F]AB = PB<-E'∙C∙PE<-A.

כאשר PB<-E' היא מטריצת המעבר מבסיס E' לבסיס B, C היא המטריצה המייצגת של F, ו-PE<-A היא מטריצת המעבר מבסיס A לבסיס E.

1. במקרה של dim( ker(f) ) = dim(u) המשמעות היא ש: dim( img(f) ) = 0, מצב זה אפשרי רק אם המטריצה המייצגת היא מטריצת ה-0. במקרה של העתקה F: Rn -> Rm כאשר n>m אזי לא יכול להיות מצב בו dim( ker(f) ) = 0, מפני שאז dim( img(f) ) יצטרך להיות שווה ל-n וזה לא אפשרי, כי img(f) הוא תת מרחב של Rm והמימד שלו לא יכול להיות גדול מ-m. [↑](#footnote-ref-1)